§4. 诱导表示与诱导特征标

群与子群表示之间的联系，归纳构造群表示

§1. 基本概念和性质

$H \leq G$ 子群. $(W,\rho) = H$ 的 $\mathbb{F}$-表示　　${}_{\mathbb{F}G}\mathbb{F}G_{\mathbb{F}H}$ 有 $\mathbb{F}G$-$\mathbb{F}H$-双模结构

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}G \otimes_{\mathbb{F}H} W$ 具有左 $\mathbb{F}G$-模结构!

$\hookrightarrow$ 称为 W 的**诱导模**，记为 (W^G, ρ^G), W^G, ρ^G, W_H^G 或 ρ_H^G.

例: $(\mathbb{F}H)^G \cong \mathbb{F}G$. 正则表示的诱导表示仍为正则表示.

$G/H =: g_1 H \sqcup \cdots \sqcup g_r H$　($\{g_1, \cdots g_r\}$ 左陪集代表元系)

$\Rightarrow \mathbb{F}G_{\mathbb{F}H} = g_1\mathbb{F}H \oplus g_2\mathbb{F}H \oplus \cdots \oplus g_r\mathbb{F}H \cong r(\mathbb{F}H)_{\mathbb{F}H}$ (右 $\mathbb{F}H$-模)

$\Rightarrow W^G = \mathbb{F}G \otimes_{\mathbb{F}H} W = \bigoplus_{i=1}^{r} g_i\mathbb{F}H \otimes_{\mathbb{F}H} W = \bigoplus_{i=1}^{r} g_i \otimes_{\mathbb{F}H} W = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{g_i(1 \otimes_{\mathbb{F}H} W)}_{\text{左 } g_iHg_i^{-1}\text{-模}}$

$\Rightarrow {}_{\mathbb{F}}(W^G) \simeq r \cdot {}_{\mathbb{F}}W$ & ${}_{\mathbb{F}H}(W^G) \not\cong r \cdot {}_{\mathbb{F}H}W$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} W^G = [G:H] \cdot \dim_{\mathbb{F}} W$

$B = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 为 W 的一组 $\mathbb{F}$-基

$\Rightarrow$ $B^G := \{g_1 \otimes \omega_1, \cdots, g_1 \otimes \omega_n, \cdots, g_r \otimes \omega_1, \cdots, g_r \otimes \omega_n\}$ 为 W^G 的一组基

引理 1.3. $\varphi^G(g)$ 在 B^G 下的矩阵为

$$\boxed{\varphi^G_{B^G}(g) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_B(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \dot{\varphi}_B(g_1^{-1}gg_r) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\varphi}_B(g_r^{-1}gg_1) & \cdots & \dot{\varphi}_B(g_r^{-1}gg_r) \end{pmatrix}}$$

每行每列仅有一个分块不为零.

其中 $\dot{\varphi}_B(g) = \begin{cases} \varphi_B(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$

Pf: $B^G = (g_1 \otimes B, \cdots, g_r \otimes B)$　　$gg_i = g_{\sigma(i)} \cdot h_i$

$\varphi^G(g) \cdot B^G = (gg_1 \otimes B, \cdots, gg_r \otimes B)$

$\overset{\star}{=} \left(\sum_i g_i \otimes \dot{\rho}(g_i^{-1}gg_1)B, \cdots, \sum_i g_i \otimes \dot{\rho}(g_i^{-1}gg_r)B\right)$

$$=\left(\sum_i g_i\otimes B\cdot \dot{\varphi}_B(g_i^{-1}gg_1),\cdots,\sum_i g_i\otimes B\cdot\dot{\varphi}_B(g_i^{-1}gg_r)\right)$$
$$=B^G\cdot \varphi_{B^G}^G(g).$$

注：☆ $\forall g_j\ \exists!\ i_0$ s.t. $gg_k\in g_{i_0}H$ (i.e. $g_{i_0}^{-1}gg_j\in H$)

$$\Rightarrow gg_j\otimes B=g_{i_0}\cdot g_{i_0}^{-1}gg_j\otimes B=g_{i_0}\otimes \varphi(g_{i_0}^{-1}gg_j)B$$
$$=\sum_i g_i\otimes\dot{\varphi}(g_i^{-1}gg_j)B.$$

例：$1_H^G\cong(\mathbb{F}(G/H),\varphi)\Leftrightarrow\varphi$ 由 G 在左陪集上的自然作用诱导 $\longleftrightarrow$ 群在集合上的作用

Pf: $G/H=\{g_1H,\cdots,g_rH\}\Rightarrow \mathbb{F}(G/H)\xrightarrow{\simeq}\mathbb{F}G\otimes_{\mathbb{F}H}\mathbb{F}$ $\quad\sum_i r_ig_iH\mapsto\sum_i g_i\otimes r_i$ □

G的单项表示 := 子群一次表示诱导表示

设 (W,φ) 为 H 的 $\mathbb{F}$-表示，$\chi=\chi_\varphi$.

$$\dot{\chi}(g):=\begin{cases}\chi(g) & g\in H\\ 0 & g\in G\setminus H\end{cases}$$

性质1.6: 1) $\chi^G(g)=\sum_{i=1}^r\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)$ $\qquad G=\coprod_i g_iH$

2) $g\notin\bigcup_{x\in G}xHx^{-1}\Rightarrow\chi^G(g)=0$

3) $H\lhd G$, $\forall g\in G\setminus H\Rightarrow\chi^G(g)=0$

4) $H\leq Z(G)$, $\forall g\in G\Rightarrow\chi^G(g)=[G:H]\,\dot{\chi}(g)$

Pf: 1) $\Rightarrow$ 2), 3), 4) ✓

1): $$\varphi_{B^G}^G(g)=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_B(g_1^{-1}gg_1)&\cdots&\dot{\varphi}_B(g_1^{-1}gg_r)\\ \vdots&&\vdots\\ \dot{\varphi}_B(g_r^{-1}gg_1)&\cdots&\dot{\varphi}_B(g_r^{-1}gg_r)\end{pmatrix}$$ □

性质：char $\mathbb{F}\nmid|H|$. 则 $\chi^G(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx)$.

Pf: $\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx)=\sum_{i=1}^r\sum_{x\in g_iH}\dot{\chi}(x^{-1}gx)=\sum_{i=1}^r|H|\cdot\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)=|H|\cdot\chi^G(g)$ □

性质 1.8. (W,φ) = H的$\mathbb{F}$表示, (V,ψ) = G的$\mathbb{F}$表示, 则

i). $W_1\subseteq W$ 子表示 $\Rightarrow$ $W_1^G\subseteq W^G$ 子表示

ii). $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_n \Rightarrow W^G=W_1^G\oplus\cdots\oplus W_n^G$

iii). $H\leq K\leq G \Rightarrow W^G\cong (W^K)^G$

iv). $\varphi^G\otimes_{\mathbb{F}}\psi \cong (\varphi\otimes_{\mathbb{F}}\psi_H)^G$

Pf: i) $\mathbb{F}G\otimes_{\mathbb{F}H} -$ 正合.

ii) 张量保直和

iii) 张量结合律: $C\otimes_B(B\otimes_A M)\cong C\otimes_A M \quad (A\to B\to C)$

iv)
$$\varphi:\ \mathbb{F}G\times(W\otimes_{\mathbb{F}}V)\longrightarrow(\mathbb{F}G\otimes_{\mathbb{F}H}W)\otimes_{\mathbb{F}}V$$
$$(g,\ w\otimes v)\longmapsto(g\otimes w)\otimes(gv)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(gh,w\otimes v)&=(gh\otimes w)\otimes ghv\\ \varphi(g,hw\otimes hv)&=(g\otimes hw)\otimes ghv\end{aligned}\right\}\Rightarrow \varphi\text{为 }\mathbb{F}H\text{-平衡映射}$$

$$\Rightarrow \varphi:\mathbb{F}G\otimes_{\mathbb{F}H}(W\otimes_{\mathbb{F}}V)\to(\mathbb{F}G\otimes_{\mathbb{F}H}W)\otimes_{\mathbb{F}}V$$

- φ为 $\mathbb{F}G$-模同态
- φ为满射
- $\dim \mathrm{LHS}=[G:H]\cdot\dim W\cdot\dim V=\dim \mathrm{RHS}$ $\}\Rightarrow \varphi$单射 $\}\Rightarrow \varphi$为同构

推论 1.9. $\chi=\chi_W$. $H\leq K\leq G$. λ为G的特征标, 则

i) $\chi=\chi_1+\chi_2\Rightarrow \chi^G=\chi_1^G+\chi_2^G$

ii) $\chi_H^G=(\chi_H^K)_K^G$

iii) $\chi^G\cdot\lambda=(\chi\lambda_H)^G$

例: $G=S_4 \supseteq H=S_3$.

S_4	1 (1)	6 (12)	8 (123)	3 $(12)(34)$	6 (1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

1° $\chi \in \mathrm{Irr}_F H$: $\chi(1)=2$, $\chi((12))=0$, $\chi((123))=-1$. 则

$$\Rightarrow \chi^G=(8,0,-1,0,0)=\chi_3+\chi_4+\chi_5$$

$$\chi^G((1))=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\chi(1)=\frac{24}{6}\cdot 2=8$$

$$\chi^G((12)(34))=0=\chi^G((1234))$$ ((12)(34), (1234) 不与 S_3 中元素共轭)

$$\chi^G((12))=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}(12)x)=0$$

$$\chi^G((123))=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{x\in G\\ x^{-1}(123)x\in H}}\dot{\chi}(x^{-1}(123)x)=\frac{C_G((123))}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h)=\frac{3}{6}\left(\chi(123)+\chi(34)\right)=-1.$$

h 与 (123) 在 G 中共轭

2° $\chi \in \mathrm{Irr}_F H$: $\chi(1)=1$, $\chi(12)=\pm 1$, $\chi(123)=1$.

$$\Rightarrow \chi^G=(4,\pm 2,1,0,0)$$

$$\chi^G((1))=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\chi(1)=\frac{24}{6}\cdot 1=4$$

$$\chi^G((12)(34))=0=\chi^G((1234))$$

$$\chi^G((12))=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}(12)x)=\frac{|G|}{|H|}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}\cdot\chi((12))=\pm 2$$

$$\chi^G((123))=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}(123)x)=\frac{|G|}{|H|}\frac{A_3^3}{A_4^3}\chi(123)=1$$

$\chi^G=\chi_1+\chi_4$ 或 $\chi_2+\chi_5$

§4.2. 模与类函数的 Frobenius 互反律.

定理 2.1 (模的 Frobenius 互反律). $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(W^G, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(W, M)$

Pf: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\mathbb{F}G \otimes_{\mathbb{F}H} W, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\mathbb{F}G, M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(W, M)$. □

推论 (特征标的 Frobenius 互反律) 若 $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$, 则 $(\chi^G, \mu)_G = (\chi, \mu_H)_H$

Pf: $LHS \overset{\mathrm{II}.2.6}{=} \mathrm{hom}_{\mathbb{F}G}(W^G, M) = \mathrm{hom}_{\mathbb{F}H}(W, M) = RHS$

定义 (诱导类函数). $\mathrm{Char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$. $H \leq G$, $\eta \in cf_{\mathbb{F}}(H)$.

$$\eta^G(g) := \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\eta}(x^{-1} g x)$$

其中 $\dot{\eta}(g) = \begin{cases} \eta(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$

注: 诱导特征标的推广.

定理 2.3 (类函数的 Frobenius 互反律) $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$, $\eta \in cf_{\mathbb{F}}(H)$, $\xi \in cf_{\mathbb{F}}(G)$, 则

$$(\eta^G, \xi)_G = (\eta, \xi_H)_H$$

Pf: $LHS = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \eta^G(g) \xi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in G} \dot{\eta}(x^{-1} g x) \xi(g^{-1})$

$= \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \dot{\eta}(y) \xi(x y^{-1} x^{-1})$

$= \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \dot{\eta}(y) \xi(y^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \eta(y) \xi(y^{-1}) = RHS$ □

注: η, ξ 不可约 $\Rightarrow$ ξ 在 η^G 中重数 $=$ η 在 ξ_H 中重数.

例 2.4. $H \leq G$, $\mathrm{Char}\,\mathbb{F} \nmid |H|$. $\sigma = H$ 的一次表示.

1) τ 为 σ^G 的不可约分支 $\Rightarrow$ σ 为 τ_H 的不可约分支.

2) $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, $G = \mathrm{Abel}$. $\Rightarrow$ $\exists$ 不可约 τ s.t. $\sigma = \tau_H$.

Pf: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\sigma, \tau_H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\sigma^G, \tau) \neq 0$. □

例 2.5. 四元数群 $G = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 的全体不可约实表示: (注 $\mathbb{R}G \ncong \mathbb{H}$!)

1) 4 个 1 次实表示 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

2) 1 个 4 次实表示 φ_5

Pf $G/G' = G^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \rho_1(\bar{i}) = \rho_1(\bar{j}) = 1,\ \rho_2(\bar{i}) = -\rho_2(\bar{j}) = 1,\ \rho_3(\bar{i}) = -\rho_3(\bar{j}) = -1,\ \rho_4(\bar{i}) = \rho_4(\bar{j}) = -1.$

$G \curvearrowright \mathbb{H} \Rightarrow \mathbb{H}$为$G$的4次不可约实表示（$\mathbb{H}$可除$\Rightarrow$不可约）

$\mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{\mathbb{R}G}(\mathbb{H},\mathbb{H}) \Rightarrow \dim \mathrm{End}_{\mathbb{R}G}(\mathbb{H},\mathbb{H}) = 4$

$x \mapsto (y \mapsto xy)$

$1+1+1+1+\frac{1}{4}4^2 = 8 \Rightarrow \rho_1,\cdots,\rho_5$为全体实不可约表示.

注 G有五个不可约复表示，维数分别为1,1,1,1,2.

例2.6. $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$，$H \leq G$，$d_H, d_G$为$H$和$G$的不可约$\mathbb{F}$-表示维数的最大值，则

$$d_H \leq d_G \leq [G:H]\, d_H$$

§4.3. Mackey 的子群定理.

$H, K \leqslant G$.

$(W, \rho) =$ H 的 $\mathbb{F}$-表示

目标: $(\rho_H^G)_K = ?$

定义 3.1 (共轭表示): $\quad {}^gH := gHg^{-1}$

${}^gW := (W, {}^g\rho)$ 为 ${}^gH$ 的 $\mathbb{F}$-表示 ((W,ρ) 的共轭表示)

其中 ${}^g\rho : {}^gH \to GL(W),\ ghg^{-1} \mapsto \rho(h)$.

$\forall\ g \in G \Rightarrow [g] := KgH := \{ kgh \mid k \in K, h \in H \} \in K \backslash G / H$

定理 3.2 (Mackey 的子群定理). $\quad (W^G)_K \cong \bigoplus_{[g] \in K\backslash G/H} \left(({}^gW)_{{}^gH \cap K} \right)^K$

注: 若 $KgH = Kg'H$, 则 $\left(({}^gW)_{{}^gH\cap K} \right)^K \cong \left(({}^{g'}W)_{{}^{g'}H \cap K} \right)^K$.

Pf: 1° $G = \coprod_{[g] \in K\backslash G/H} KgH \Rightarrow \mathbb{F}G = \bigoplus_{[g] \in K\backslash G/H} \mathbb{F}(KgH)$

$\Rightarrow (W^G)_K = \bigoplus_{KgH \in K\backslash G/H} \left(\mathbb{F}(KgH) \otimes_{\mathbb{F}H} W \right)$

2° $K/{}^gH \cap K \xrightarrow{1:1} KgH/H \quad \left(kgH = k'gH \Leftrightarrow k^{-1}k' \in {}^gH \cap K \Leftrightarrow k({}^gH\cap K) = k'({}^gH \cap K) \right)$

$\Rightarrow \mathbb{F}(KgH) \otimes_{\mathbb{F}H} W = \bigoplus_{[k] \in K/{}^gH\cap K} k \cdot (g \otimes W) = (g \otimes W)_{{}^gH \cap K}^K$

3° $\varphi : g \otimes W \xrightarrow{\cong} {}^gW \quad ({}^gH \cap K\text{-模})$

$g \otimes \omega \mapsto \omega$

$$\left(\begin{aligned} \varphi(\rho(k).(g\otimes\omega)) &= \varphi(g \otimes h\omega) = h\omega = {}^g\rho(ghg^{-1})(\omega) \\ &= {}^g\rho(k)(\varphi(g\otimes\omega)) \end{aligned} \right)$$

注: $\left(({}^gW)_{{}^gH\cap K} \right)^K \cong \mathbb{F}(KgH) \otimes_{\mathbb{F}H} W = \mathbb{F}(Kg'H) \otimes_{\mathbb{F}H} W = \left(({}^{g'}W)_{{}^{g'}H \cap K} \right)^K$

推论3.3. $\forall\ \eta\in cf_{\mathbb{F}}(H)$. ${}^g\eta: {}^gH\to\mathbb{F}$ ${}^g\eta(ghg^{-1}):=\eta(h)$, 则

$$\left(\eta_H^G\right)_K=\sum_{[g]\in K\backslash G/H}\left(\left({}^g\eta\right)_{{}^gH\cap K}\right)^K$$

推论3.4. 若 $H\triangleleft G$, 则 $(W^G)_H=\bigoplus_{[g]\in G/H}(g\otimes W)\cong\bigoplus_{[g]\in G/H}{}^gW$

推论3.5. $(1_H^G)_K\cong\bigoplus_{g\in K\backslash G/H}1^K_{{}^gH\cap K}$

推论3.6. $(\chi_H^G,\eta_K^G)_G=\sum_{g\in K\backslash G/H}\left(\eta_{{}^gH\cap K},\left({}^g\chi\right)_{{}^gH\cap K}\right)_{{}^gH\cap K}$

Pf: $LHS=\left(\eta,(\chi_H^G)_K\right)_K=\sum_{g\in K\backslash G/H}\left(\eta,\left({}^g\chi_{{}^gH\cap K}\right)^K\right)_K=RHS.$ □

§4.4 诱导表示不可约性的判定

称 G 的两表示**互不相交**，若它们没有共同不可约直和项。

若 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$，则 M 与 N 不相交 iff $(\chi_M,\chi_N)=0$.

定理 4.1 (Mackey 不可约法则) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$，且 $\mathbb{F}$ 分裂 G 和 H，则

$$\varphi^G \text{ 不可约} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ 不可约} \\ \varphi_{H\cap {}^gH} \text{ 和 } {}^g\varphi_{H\cap {}^gH} \text{ 不相交} \quad \forall g\in G\setminus H. \end{cases}$$

Pf (of case: $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$):

$$(\chi_{\varphi^G},\chi_{\varphi^G}) = (\chi_\varphi{}^G,\chi_\varphi{}^G)$$
$$= \sum_{[g]\in H\backslash G/H} \left((\chi_\varphi)_{{}^gH\cap H},(\chi_{{}^g\varphi})_{{}^gH\cap H}\right)_{{}^gH\cap H} \qquad \square$$

推论：$H\triangleleft G$，$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$ 且 $\mathbb{F}$ 分裂 G 和 H，$\varphi\in R^+_{\mathbb{F}}(H)$

$$\varphi^G \text{ 不可约} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ 不可约} \\ \varphi\not\cong {}^g\varphi \quad \forall g\in G\setminus H. \end{cases}$$

推论：$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$. $\mathbb{F}$ 分裂 G 和 H. $\sigma = H$ 的一次表示. 则

$$\sigma^G \text{ 不可约} \Leftrightarrow {}^g\sigma\not\cong\sigma \quad (\forall g\in G\setminus H).$$
$$\Leftrightarrow \forall g\in G\setminus H\ \exists\, h\in H\cap {}^gH \text{ s.t. } \sigma(h)\neq\sigma(g^{-1}hg).$$

定理 4.4 (Brauer)
- $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$，$\mathbb{F}$ 分裂 G 和 H.
- 群作用 $A\curvearrowright \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$ & $A\curvearrowright \mathcal{C}:=\{G\text{ 的共轭类}\}$ 保持取值映射：$(\ ,\ ):\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G)\times\mathcal{C}\to\mathbb{F}$，则

$$\#\{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G \mid a\chi=\chi\} = \#\{C\in\mathcal{C}\mid aC=C\}$$

Pf: $\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_r\end{pmatrix}\cdot(C_1\cdots C_r) = a\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_r\end{pmatrix}\cdot a(C_1\cdots C_r) =: X_a\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_r\end{pmatrix}\cdot(C_1\cdots C_r)\cdot Y_a$

$\Rightarrow Y_a^{-1} = T^{-1}X_aT \quad \left(T=\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_r\end{pmatrix}(C_1\cdots C_r)\right)$

$\Rightarrow \mathrm{LHS} = \mathrm{tr}(X_a) = \mathrm{tr}(Y_a^{-1}) \overset{Y_a\text{为置换矩阵}}{=} \mathrm{tr}(Y_a) = \mathrm{RHS}. \qquad \square$

$H \triangleleft G \Rightarrow G \curvearrowright \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} H$ & $G \curvearrowright \mathcal{C} = \{H$的共轭类$\}$

$g\psi := {}^{g}\psi$ & $gC := \{gxg^{-1} \mid x \in C\}$

推论4.5. $H \triangleleft G$, $C_G(h) \subseteq H$ $\forall\, h \in H\setminus\{1\}$. $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$ 且 $\mathbb{F}$ 分裂 H 和 G, 则

i). $\psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} H \setminus \{1_H\} \Rightarrow \psi^G \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} G$

ii). $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} G \setminus \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G/H) \Rightarrow \chi = \psi_H^G$

Pf: i) $\#\{\psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} H \mid {}^{g}\psi = \psi\} \overset{4.4}{=} \#\{C \in \mathcal{C} \mid gC = C\}$

ψ^G 不可约 $(\forall \psi \neq 1_H) \Leftrightarrow {}^{g}\psi \neq \psi \ (\forall g \notin H, \forall \psi \neq 1)$

$\Leftrightarrow \#\{\psi \in \mathrm{Irr} H \mid {}^{g}\psi = \psi\} = 1 \quad \forall g \notin H$

$\Leftrightarrow \#\{C \in \mathcal{C} \mid gC = C\} = 1 \quad \forall g \notin H$

$\Leftrightarrow gCg^{-1} \neq C \quad (\forall C \neq \{1\}, \forall g \notin H)$

$\Leftarrow$ 若 $\forall h \in C\setminus\{1\}$ 则 $h \notin gCg^{-1}$ (否则 $\exists x \in H$ s.t. $h = g(xhx^{-1})g^{-1}$)

$\Leftarrow C_G(h) \subseteq H \quad (\forall h \in H\setminus\{1\})$

ii). 取 χ_H 的一个不可约分支 $\psi\ (\neq 1)$

$\overset{i)}{\Rightarrow} \psi^G$ 不可约, 且 $(\chi, \psi^G) = (\chi_H, \psi) \neq 0$

$\Rightarrow \chi = \psi^G$ □

§4.5. Clifford 定理

定理 5.1 (Clifford) $\mathbb{F}$=域 $(V,\rho)\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$, $N\lhd G$.

i) (V,ρ_N) 为 N 的完全可约表示，且不可约直和项相互共轭且重数相同，记为 m.

ii) $\forall$ ρ_N 的不可约分支 σ，记 $G_\sigma := \{g\in G \mid {}^g\sigma \cong \sigma\}$，则

$$N\subseteq G_\sigma,\quad m\sigma \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G_\sigma) \quad \& \quad \rho\cong (m\sigma)_{G_\sigma}^{G}.$$

Pf: i) $W\subseteq (V,\rho_N)$ 不可约子表示 $\Rightarrow gW\cong {}^gW$ 不可约

$\sum\limits_g gW \subseteq (V,\rho)$ 子表示 $\Rightarrow V=\sum\limits_g gW$ 为不可约子表示之和

$\Rightarrow V$=完全可约 且为共轭表示之和.

齐次分支

$V(W) := \sum\limits_{\substack{W'\subseteq V\\ W'\simeq W}} W' \Rightarrow V(W)\underset{\cong}{\xrightarrow{g}} V({}^gW) \Rightarrow$ 重数相同.

ii) $(W,\sigma)\subseteq (V,\rho_N)$.

· $\forall g\in N$, $\Rightarrow W \xrightarrow[\sim]{\varphi} {}^gW$ (N-模同构)
$\omega \mapsto g^{-1}\omega$

$$\left(\begin{aligned}\varphi(\rho_N(n)\,\omega) &= g^{-1}n\omega\\ &=\rho_N(g^{-1}ng)(g^{-1}\omega)\\ &={}^g\rho_N(n)\,(\varphi(\omega))\end{aligned}\right)$$

· i) $\Rightarrow V(W) = \sum\limits_{g\in G_\sigma} gW \cong m\sigma$

$$G=\coprod g_i G_\sigma \Rightarrow V=\bigoplus_i g_i V(W) \cong V(W)_{G_\sigma}^{G}$$

V 不可约 $\Rightarrow m\sigma = V(W)$ 不可约

定理 5.2 (Ito) $N\lhd G$, $\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$. 若 χ_N 有一次分支，则 $\chi(1)\mid [G:N]$.

Pf: $\mu := \chi_N$ 的一个一次分支

· Clifford $\Rightarrow \chi(1) = [G:G_\mu]\cdot m\cdot \deg\mu = [G:G_\mu]\cdot m$

· $\gamma := m\mu \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G_\mu \Rightarrow |\gamma(n)| = m|\mu(n)| = m = \gamma(1)$ $(\forall n\in N)$

$\Rightarrow N\subseteq Z(\gamma)$

· 推论 2.6.4 $\Rightarrow \gamma(1)\mid [G_\mu : Z(\gamma)] \Rightarrow m \mid [G_\mu:N]$

$$\Rightarrow \chi(1)\mid [G:G_\mu]\cdot[G_\mu:N] = [G:N]$$

推论 5.3. $N\lhd G$, N Abel $\Rightarrow G$ 的任一不可约复表示次数整除 $[G:N]$.